

Научная статья  
УДК 530.12  
DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-202403-08>

## Аналитические связанные решения уравнений космологической динамики в рамках ОТО и гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне

Г.Д. Манучарян<sup>1</sup>, И.В. Фомин<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия)

<sup>1</sup> Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

<sup>1</sup> [gdmnucharyan@bmstu.ru](mailto:gdmnucharyan@bmstu.ru), <sup>2</sup> [fomin\\_iv@bmstu.ru](mailto:fomin_iv@bmstu.ru)

### Аннотация

**Постановка проблемы.** В настоящее время существуют различные модифицированные теории гравитаций, аналитическое решение которых существенно усложняется ввиду их нелинейно-интегро-дифференциальных форм. При этом отсутствуют модели, позволяющие расширять решения, полученные в рамках ОТО, на случаи модифицированных гравитаций (в рассматриваемом случае гравитация Эйнштейна – Гаусса – Бонне) с помощью функциональной зависимости от инфляционных параметров и линейной комбинации параметров медленного скатывания первого.

**Цель.** Нахождение аналитических решений уравнений космологической динамики в рамках гравитации Эйнштейна – Гаусса – Бонне, связанных с решениями уравнений фоновой динамики в рамках ОТО, определение параметров, позволяющих проводить их верификацию.

**Результаты.** Представлена новая форма связи инфляционных параметров между гравитацией ЭГБ и общей теорией относительности (ОТО), выражены, с учетом предложенной формы связи, функциональные зависимости космологических параметров ЭГБ гравитации, через параметры ОТО. Рассмотрена конкретная модель космологической инфляции для случая ОТО, показано, что модель не верифицируема по наблюдательным ограничениям.

**Практическая значимость.** Предложенная форма связи позволяет расширять решения уравнений космологической динамики ОТО на случай гравитации Эйнштейна – Гаусса – Бонне, что в свою очередь дает возможность оценивать квантовые поправки к ОТО оперируя только инфляционными параметрами ОТО.

### Ключевые слова

*Общая теория относительности, гравитация Эйнштейна – Гаусса – Бонне, приближение медленного скатывания, гравитационные волны*

**Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения №073-03-2024-060/1 от 13.02.2024 к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2024-060 от 18.01.2024, заключенным между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.**

### Для цитирования

Манучарян Г.Д., Фомин И.В. Аналитические связанные решения уравнений космологической динамики в рамках ОТО и гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне // Нелинейный мир. 2024. Т. 22. № 3. С. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-202403-08>

A brief version in English is given at the end of the article

### Введение

В рамках современной космологии, с учетом стандартной модели, остаются неразрешенными проблемы темной материи и темной энергии, несмотря на существенный объем работ по направлению [1]. Развивая различные подходы определения источников указанных форм материи, обращается внимание, помимо прочего, на модифицированные по отношению к общей теории относительности (ОТО) гравитации, включающие в рассматриваемое действие поля (скалярные, киральные), члены, включающие высокие порядки кривизны или функции от них [2, 3]. Однако каждая следующая модификация делает анализируемые уравнения все более и более сложными, тем самым практически сводя на нет возможность нахождения аналитических решений.

Цель работы – рассмотреть возможность конструирования аналитических решений уравнений космологической динамики в рамках модифицированной гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне,

включающей в действие неминимальную связь между скалярным инфлатонным полем и инвариантом Гаусса–Бонне, основанных на решениях уравнений космологической динамики для ОТО. При этом в модели появляется дополнительная константа, параметризующая связь скалярного поля и инварианта Гаусса–Бонне. Указанная константа также влияет на спектральный индекс скалярных возмущений, тензорно-скалярное отношение, амплитуду скалярных возмущений.

### 1. Уравнения космологической динамики

Уравнения космологической динамики в рамках ОТО рассматриваются исходя из действия Эйнштейна–Гильберта, которое в системе единиц  $8\pi G = c = 1$  записывается как

$$S_E = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.1)$$

Отсюда, варьированием по полю и по метрике, записывается система

$$3H\dot{\phi} + \ddot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.2)$$

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.3)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.4)$$

которая с учетом линейной независимости только двух из трех уравнений представляется в виде

$$V(\phi(t)) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (1.5)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (1.6)$$

Для нахождения аналитических решений рассмотренной системы обратимся к определению параметра Хаббла:  $H(t) = \dot{a} / a$ , что позволит переписать второе уравнение системы (1.3) как

$$\dot{\phi} = \sqrt{-2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2} = \sqrt{(f(t))^2}, \quad (1.7)$$

откуда, выбрав соответствующую форму функции  $f(t)$ , получим

$$\phi(t) = \int f(t) dt, \quad (1.8)$$

$$a(t) = a_0 e^{c_1 t} \exp\left[-\frac{1}{2} \int \left(\int f^2(t) dt\right) dt\right], \quad (1.9)$$

$$H(t) = \int -\frac{1}{2} f^2(t) dt. \quad (1.10)$$

Топологический инвариант Гаусса–Бонне при неминимальном взаимодействии со скалярным полем дает ненулевой вклад, что формально можно представить как [4]

$$S_{GB} = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_{GB} \partial_\nu \phi_{GB} - V_{GB}(\phi_{GB}) + \xi(\phi_{GB}) R_{GB} \right], \quad (1.11)$$

где  $\xi(\phi_{GB})$  – функция неминимальной связи скалярного поля и скаляра Гаусса–Бонне, определенного как

$$R_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Уравнения космологической динамики при этом записываются как

$$3H_{GB}^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}_{GB}^2 + V_{GB}(\phi_{GB}) + 12\dot{\xi}H_{GB}^3, \quad (1.12)$$

$$\ddot{\phi}_{GB} = -2\dot{H}_{GB} + 4\ddot{\xi}H_{GB}^2 + 4\dot{\xi}\dot{H}_{GB}(2\dot{H}_{GB} - H_{GB}^2), \quad (1.13)$$

$$\ddot{\phi}_{GB} + 3H_{GB}\dot{\phi}_{GB} + \partial_{\phi_{GB}}V_{GB}(\phi_{GB}) + 12H_{GB}^2(\dot{H}_{GB} + H_{GB}^2)\partial_{\phi_{GB}}\xi(\phi_{GB}) = 0, \quad (1.14)$$

откуда, аналогично случаю ОТО, можно ввиду линейной зависимости переписать (1.12)–(1.14) в виде

$$V_{GB}(\phi_{GB}) = 3H_{GB}^2 + \dot{H}_{GB} - 10H_{GB}^3\dot{\xi} - 2H_{GB}^2\ddot{\xi} - 4H_{GB}\dot{H}_{GB}\dot{\xi}, \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}_{GB}^2 = -\dot{H}_{GB} - H_{GB}^3\dot{\xi} + 4H_{GB}\dot{H}_{GB}\dot{\xi} + 2H_{GB}^2\ddot{\xi}. \quad (1.16)$$

Полагая наличие связи между инфляционными параметрами для ОТО и ЭГБ гравитации, решения, полученные для ОТО, возможно расширить на случай гравитации ЭГБ. Для описания связи параметра Хаббла в рамках рассматриваемых гравитаций можно ввести параметр расхождения [5]:

$$\Delta_H = H_{GB} - H_E, \quad (1.17)$$

где индекс «E» соответствует ОТО.

Далее рассмотрим случай, когда параметр расхождения  $\Delta_H$  определяется как

$$\Delta_H = -\beta \left( \frac{\dot{H}_E}{H_E} + \frac{\ddot{H}_E}{2\dot{H}_E} \right). \quad (1.18)$$

## 2. Приближение медленного скатывания и параметры космологических возмущений

В рамках настоящей работы инфляция будет рассматриваться с учетом приближения медленного скатывания, идея которой заключается в исключении из уравнений движения медленно варьирующихся малых членов. Само приближение медленного скатывания может привести к существенному изменению спектра реликтового излучения, плотности энергии реликтовых гравитационных волн [6–8].

Параметры медленного скатывания определяются следующим образом [6]

$$\epsilon_E = -\frac{\dot{H}_E}{H_E^2}, \quad (2.1)$$

$$\delta_E = -\frac{\ddot{H}_E}{2H_E\dot{H}_E}. \quad (2.2)$$

При этом условия медленного скатывания формулируются как  $\epsilon_E \ll 1$  и  $|\delta_E| \ll 1$  [6].

Уравнения (1.15)–(1.16) можно переписать с учетом связи  $H_E = H_{GB}(1 - 2\dot{\xi}H_{GB})$ , предложенной в [5], соотношения (1.18) и параметров медленного скатывания в виде

$$V_{GB}(\phi_{GB}) = H_E^2(3 - \epsilon_E + \Delta_E - 2\Delta_E^2) = 3H_E^2(1 + \Delta_E^2) - \frac{1}{2}\dot{\phi}_{GB}^2, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}_{GB}^2 = H_E^2(\epsilon_E - \Delta_E - \Delta_E^2), \quad (2.4)$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{H_E} \frac{\Delta_E}{(1 + \Delta_E)^2}, \quad (2.5)$$

где  $\Delta_E = \beta(\epsilon_E + \delta_E)$ .

Для случая гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне, параметры медленного скатывания

$$\epsilon_{GB} = -\frac{\dot{H}_{GB}}{H_{GB}^2} = -\frac{\partial_t [H_E + \Delta_H]}{(H_E + \Delta_H)^2} = \frac{\epsilon_E}{1 + \Delta_E} - \frac{\dot{\Delta}_E}{H_E (1 + \Delta_E)^2}, \quad (2.6)$$

$$\delta_{GB} = \epsilon_{GB} - \frac{\dot{\epsilon}_{GB}}{2\epsilon_{GB}H_{GB}} = -\frac{-2\epsilon_E^2 H_E^3 (1 + \Delta_E) + H_E^2 (1 + \Delta_E) \dot{\epsilon}_E + 3\epsilon_E H_E^2 \dot{\Delta}_E + \dot{H}_E \dot{\Delta}_E - H_E \ddot{\Delta}_E}{2H_E^2 (1 + \Delta_E) (\epsilon_E H_E (1 + \Delta_E) - \dot{\Delta}_E)}. \quad (2.7)$$

Спектральный индекс скалярных возмущений  $n_{S(GB)}$  и отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных мод возмущений (тензорно-скалярное отношение)  $r_{(GB)}$  для ЭГБ гравитации [5]

$$n_{S(GB)}(t) - 1 = -2\epsilon_{GB} - \frac{1}{H_E (1 + \Delta_E)} \frac{d}{dt} \ln \left[ \epsilon_{GB} - \frac{\Delta_E}{1 + \Delta_E} \right], \quad (2.8)$$

$$r_{GB}(t) = 16 \left( \epsilon_{GB} - \frac{\Delta_E}{1 + \Delta_E} \right). \quad (2.9)$$

Соотношения (2.8)–(2.9) с учетом наблюдательных ограничений на тензорно-скалярное отношение и спектральный индекс скалярных возмущений [9, 10]

$$n_S = 0,965 \pm 0,004, \quad (2.10)$$

$$r < 0,032, \quad (2.11)$$

$$P_S = 2,1 \times 10^{-9}, \quad (2.12)$$

( $P_S$  – амплитуда скалярных возмущений на пересечении радиуса Хаббла ( $k = aH$ )), позволяют наложить ограничения на возможные значения параметра  $\beta$ , а также верифицировать различные модели. Скорость распространения скалярных и тензорных возмущений при этом можно оценить как [5, 11]

$$c_S^2 - 1 = -\frac{\left( \frac{8\epsilon_E \left( \frac{\Delta_E}{1 - \Delta_E} \right) - 4\dot{\Delta}_E}{1 + \frac{2\Delta_E^2}{1 - \Delta_E}} - \frac{\frac{4\Delta_E^2 \left( 1 - 5\delta_1 - \frac{\dot{\Delta}_E}{2H_E \Delta_E} \right)}{1 - \Delta_E}}{H_E \left( 1 + \frac{2\Delta_E^2}{1 - \Delta_E} \right)^2} - \frac{\frac{4\Delta_E^2 \left( 1 - 5\delta_1 - \frac{\dot{\Delta}_E}{2H_E \Delta_E} \right)}{1 - \Delta_E}}{1 + \frac{2\Delta_E^2}{1 - \Delta_E} \left( 1 - 5\delta_1 - \frac{\dot{\Delta}_E}{2H_E \Delta_E} \right)} \right)^2}{\frac{4\epsilon_E}{1 + \Delta_E} - \frac{4\dot{\Delta}_E}{H_E (1 + \Delta_E)^2} - \frac{4\Delta_E}{1 + \Delta_E} - \frac{4\Delta_E \left( \delta_1 - \frac{\dot{\Delta}_E}{2H_E \Delta_E} \right)}{1 + \Delta_E \left( \delta_1 - \frac{\dot{\Delta}_E}{2H_E \Delta_E} \right)} + \frac{12\Delta_E^2}{(1 + \Delta_E)^2 \left( 1 - \frac{2\Delta_E}{1 + \Delta_E} \right)}}, \quad (2.13)$$

$$\delta_1 = \frac{\epsilon_E}{1 + \Delta_E} - \frac{\dot{\Delta}_E}{H_E (1 + \Delta_E)^2},$$

$$c_G^2 - 1 = \Delta_E \frac{2(\epsilon_E - \Delta_E - 1)}{\Delta_E^2 - 1}. \quad (2.14)$$

В случае  $\Delta_E \rightarrow 0$  имеем  $c_S = c_G = 1$ .

3. Модель с генерирующей функцией  $f(t) = \sqrt{k \left( e^{-m(t+t_0)} + \frac{1}{m(t+t_0)^4} \right)}$

Исходя из (1.9)–(1.10) можно для рассматриваемой формы генерирующей функции записать

$$a(t) = a_0 \exp \left[ c(t+t_0) - \frac{k}{2} \left( \frac{1}{m^2 e^{m(t+t_0)}} + \frac{1}{6m(t+t_0)^2} \right) \right], \quad (3.1)$$

$$H_E(t) = c + \frac{k}{6m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} + \frac{1}{(t+t_0)^3} \right), \quad (3.2)$$

где  $c$  – константа интегрирования.

Рассмотрим случай, когда константы модели будут иметь значения  $c = 0,68$ ,  $k = 1$ ,  $t_0 = 0,0333$ . При этом наблюдается две эпохи

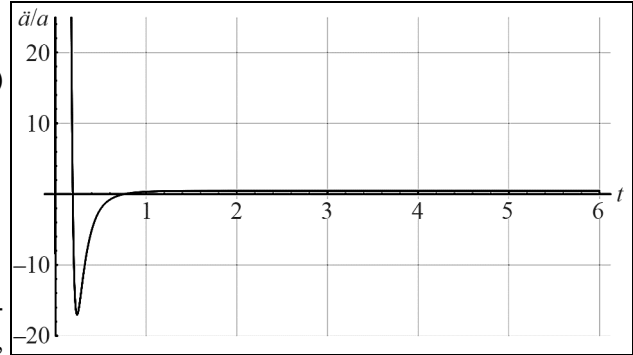


Рис. 1. Относительное ускорение рассматриваемой модели ускоренного расширения Вселенной (рис. 1). Fig. 1. Relative acceleration of the model under consideration

На больших временах относительное ускорение

$$Q(t) = \frac{\ddot{a}}{a} = c^2 + \frac{ck}{3m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} + \frac{1}{(t+t_0)^3} \right) + \frac{k}{36} \left( \frac{9ke^{-2m(t+t_0)}}{m^2} + 6e^{-m(t+t_0)} \left( \frac{k}{m^2(t+t_0)} - 3 \right) + \frac{k - 18m(t+t_0)^2}{m^2(t+t_0)^6} \right), \quad (3.3)$$

принимает постоянное значение точно так же, как и параметр Хаббла (3.2):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = c^2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = c. \quad (3.4)$$

Временная эволюция скалярного поля и потенциала этого скалярного поля можно определить с учетом (3.2), (1.5) и (1.6):

$$V(t) = 3 \left( c + \frac{k}{6m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} + \frac{1}{(t+t_0)^3} \right) \right)^2 - \frac{k}{6m} \left( 3me^{-m(t+t_0)} - \frac{3}{(t+t_0)^4} \right), \quad (3.5)$$

$$\phi(t) = \int_0^t \sqrt{k \left( e^{-m(\zeta+t_0)} + \frac{1}{m(\zeta+t_0)^4} \right)} d\zeta. \quad (3.6)$$

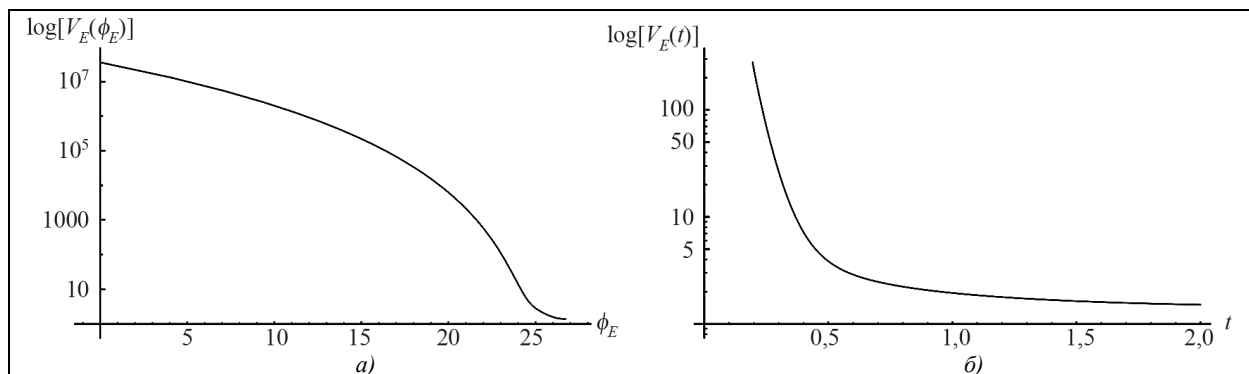


Рис. 2. Графики зависимости потенциала от скалярного поля. а – ось потенциала в логарифмической шкале; б – эволюция потенциала скалярного поля от времени (ось потенциала также в логарифмической шкале)

Fig. 2. Potential dependence on scalar field: а – potential axis in logarithmic scale; б – the evolution of the potential of a scalar field over time, the potential axis is also in the logarithmic scale

Представленная модель удовлетворяет приближению медленного скатывания: параметры медленного скатывания малы по отношению к единице до выхода из инфляции (рис. 3). При этом выход из инфляции происходит при значении  $\epsilon(t_e) = 1$ , причем момент  $t_e$  (приблизительно для рассматриваемых констант модели равен 0.19) в точности совпадает с первым нулем относительного ускорения (см. рис. 1).

$$\epsilon_E(t) = 18km^2 \frac{\exp[-m(t+t_0)] + \frac{1}{m(t+t_0)^4}}{\left(6mc + k \left(3 \exp[-m(t+t_0)] + \frac{1}{(t+t_0)^3}\right)\right)^2} \quad (3.7)$$

$$\delta_E(t) = \frac{3m^2 \exp[-m(t+t_0)] + \frac{12}{(t+t_0)^5}}{2 \left(3m \exp[-m(t+t_0)] + \frac{3}{(t+t_0)^4}\right) \left(c + \frac{k}{6m} \left(3 \exp[-m(t+t_0)] + \frac{1}{(t+t_0)^3}\right)\right)}. \quad (3.8)$$

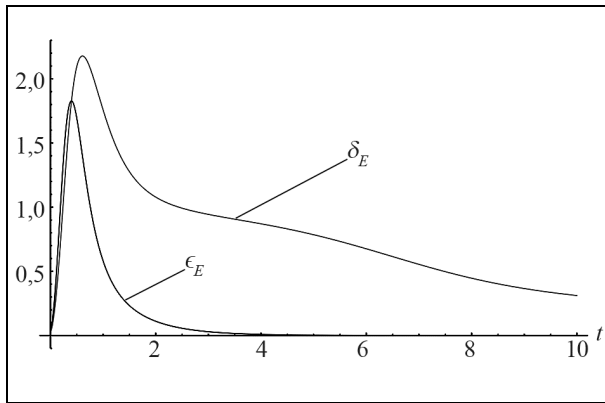


Рис. 3. Параметры медленного скатывания для случая ОТО

Fig. 3. Slow rolling parameters for the case by general relativity

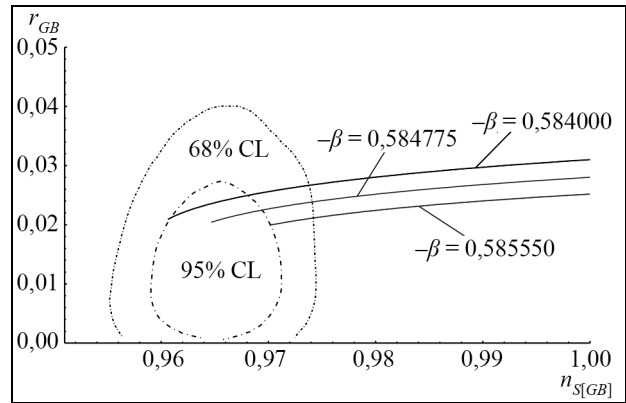


Рис. 4. Зависимость тензорно-скалярного отношения от наклона спектра скалярных возмущений для различных значений параметра медленного скатывания

Fig. 4. Dependence of the tensor-scalar ratio on the slope of the spectrum of scalar perturbations for different values of the slow rolling parameter

Заметим, что при  $t \gg 1$  для рассматриваемых констант можно оценить параметры медленного скатывания как  $\epsilon \approx \delta \approx 0$ . Число е-фолдов при выходе из инфляции (для рассматриваемых констант модели) оценивается как

$$N_f = \int_0^{t_e} H_E(t) dt \approx 56,7, \quad (3.9)$$

что лежит в диапазоне ожидаемых значений.

Анализируя расширение рассмотренной модели на случай гравитации Эйнштейна Гаусса–Бонне, первым делом необходимо наложить ограничения на константу неминимального взаимодействия  $\beta$ . Теоретически это возможно из соотношений (2.10), (2.11): решая параметрическую задачу, при которой выполняется  $r(n_{S(GB)} = 0,965) < 0,032$ . Учитывая ограничения, представленные в [12], константа неминимального взаимодействия  $\beta$  оценивается как

$$\beta \in [0,58400, 0,58555]. \quad (3.10)$$

чем демонстрируется, что учет неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса–Бонне позволяет верифицировать по зависимости тензорно-скалярного отношения от наклона спектра скалярных возмущений рассматриваемую модель.

Исходя из (2.13) и (2.14) для рассматриваемой модели можно определить, что на больших временах скорость распространения скалярных и тензорных возмущений (скорость света и гравитационных волн) равна единице (в рассматриваемой системе  $8\pi G = c = 1$ ).

Функция неминимального взаимодействия для рассматриваемой модели определяется через дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{6\beta \left( \frac{9k}{m} \left( me^{-m(t+t_0)} + \frac{1}{(t+t_0)^4} \right)^2 + \left( 9m^2 e^{-m(t+t_0)} + \frac{36}{(t+t_0)^5} \right) \left( c + \frac{k}{m} \left( \frac{e^{-m(t+t_0)}}{2} + \frac{1}{6(t+t_0)^3} \right) \right) \right)}{\left( 3me^{-m(t+t_0)} - \frac{3}{(t+t_0)^4} \right) \left( c + \frac{k}{m} \left( \frac{e^{-m(t+t_0)}}{2} + \frac{1}{6(t+t_0)^3} \right) \right)^3} F^2(t), \quad (3.11)$$

где

$$F(t) = -6 + \frac{k\beta \left( -3me^{-m(t+t_0)} - \frac{12}{(t+t_0)^5} \right)}{m \left( c + \frac{k}{m} \left( \frac{e^{-m(t+t_0)}}{2} + \frac{1}{6(t+t_0)^3} \right) \right)^2} + \frac{3\beta \left( 3m^2 e^{-m(t+t_0)} + \frac{12}{(t+t_0)^5} \right)}{\left( -3me^{-m(t+t_0)} - \frac{3}{(t+t_0)^4} \right) \left( c + \frac{k}{m} \left( \frac{e^{-m(t+t_0)}}{2} + \frac{1}{6(t+t_0)^3} \right) \right)}.$$

Форму эволюции скалярного поля, при этом, можно представить как

$$V_{GB}(t) = \frac{k}{6m} \left( -3e^{-m(t+t_0)} - \frac{3}{(t+t_0)^4} \right) + 3 \left( c + \frac{k}{6m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} + \frac{1}{(t+t_0)^3} \right) \right)^2 + \frac{\beta k}{2} \left( e^{-m(t+t_0)} - \frac{1}{m(t+t_0)^4} \right) -$$

$$-\beta \frac{\left( 3m^2 e^{-m(t+t_0)} - \frac{12}{(t+t_0)^5} \right) \left( c + \frac{k}{6m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} - \frac{1}{(t+t_0)^3} \right) \right)}{2 \left( 3me^{-m(t+t_0)} - \frac{3}{(t+t_0)^4} \right)} \quad (3.12)$$

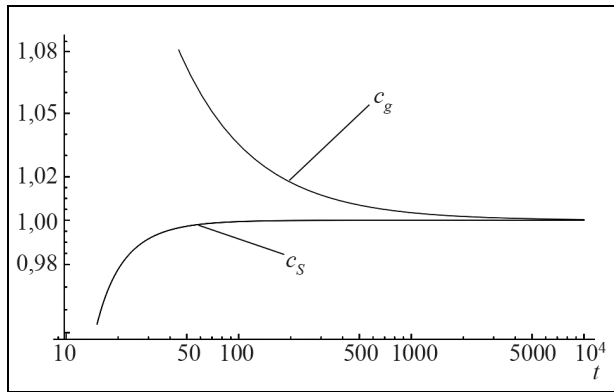
$$-\beta^2 \frac{\left( \frac{9k}{m} \left( me^{-m(t+t_0)} - \frac{1}{(t+t_0)^4} \right)^2 + 9 \left( e^{-m(t+t_0)} - \frac{4}{(t+t_0)^5} \right) \left( c + \frac{k}{6m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} - \frac{1}{(t+t_0)^3} \right) \right) \right)^2}{162 \left( me^{-m(t+t_0)} - \frac{1}{(t+t_0)^4} \right)^2 \left( c + \frac{k}{6m} \left( 3e^{-m(t+t_0)} - \frac{1}{(t+t_0)^3} \right) \right)^2},$$

а эволюцию скалярного поля можно определить исходя из дифференциального уравнения

$$\left( \frac{d\phi_{GB}}{dt} \right)^2 = \frac{k}{m} \frac{1 + me^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^4}{m(t+t_0)^4} -$$

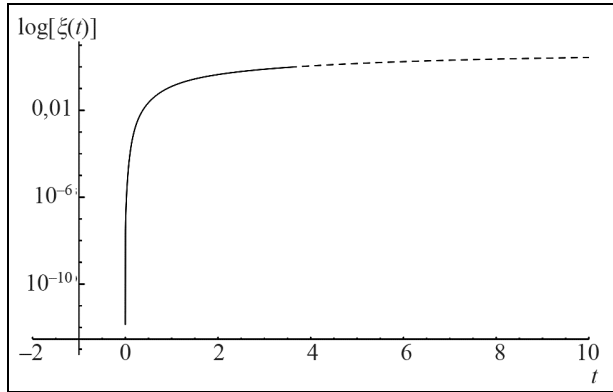
$$-\beta \frac{\left( 6k(1 + me^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^4)^2 + (4 + m^2 e^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^5) (6cm(t+t_0)^3 + k(1 + 3e^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^3)) \right)}{6m(t+t_0)^4 (1 + me^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^4)} -$$

$$-\beta^2 \frac{\left( 6k(1 + me^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^4)^2 + (4 + m^2 e^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^5) (6mc(t+t_0)^3 + k(1 + 3e^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^3)) \right)^2}{2(t+t_0) (1 + me^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^4)^2 (6mc(t+t_0)^3 + k(1 + 3e^{-m(t+t_0)} (t+t_0)^3))^2} \quad (3.13)$$



**Рис. 5.** Зависимость скоростей распространения скалярных и тензорных возмущений от времени для рассматриваемой генерирующей функции. Ось времени в логарифмических координатах

**Fig. 5.** Dependence of propagation rates of scalar and tensor perturbations on time for the generating function under consideration. Time axis in logarithmic coordinates



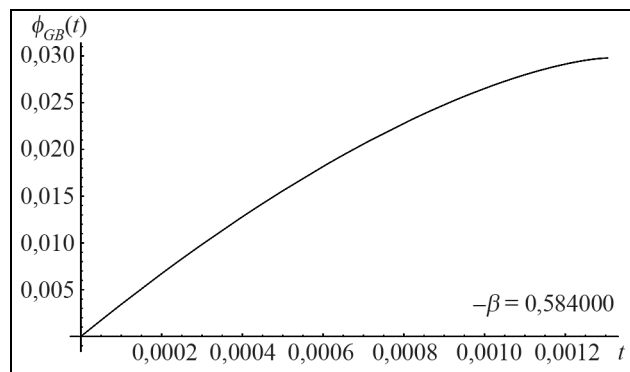
**Рис. 6.** Эволюция функции неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса–Бонне (штрихованная часть функции соответствует случаю больших полей, когда функция  $\xi > 1$ )

**Fig. 6.** Evolution of the non-minimal interaction function of a scalar field and a Gauss–Bonnet scalar. The hatched part corresponds to the case of large fields when the function  $\xi > 1$

### Заключение

Рассмотрен новый класс решений уравнений космологической динамики для случая гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне, основанной на связи космологических параметров ЭГБ гравитации с

параметрами для ОТО и неминимальной связи скалярного поля и инварианта Гаусса–Бонне. Для рассмотренной формы связи даны основные соотношения, позволяющие расширять решения уравнений космологической динамики ОТО на случай гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне, провести их верификацию по наблюдательным ограничениям.



**Рис. 7.** Эволюция скалярного поля при учете неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса – Бонне  $\beta$  (представлена действительная часть скалярного поля)

**Fig. 7.** The evolution of a scalar field when considering the nonminimum interaction of a scalar field and a Gauss–Bonnet scalar  $\beta$ . The graph represents the real part of a scalar field

Представлена методика генерации точных решений уравнений космологической динамики подбором функции  $f(t)$  (соотношение (1.7)), на основе которой представлено новое решение уравнений космологической динамики в рамках классической теории гравитации и модифицированной теории Эйнштейна–Гаусса–Бонне.

Для рассмотренной модели показано, что скорость распространения скалярных и тензорных возмущений на больших временах совпадает

с единицей, а также, что для выделенного диапазона значений константы неминимальной связи  $\beta \in [0,58400, 0,58555]$  модель проходит верификацию по зависимости тензорно-скалярного отношения от наклона спектра скалярных возмущений.

### Список источников

1. Arun K., Gudennavar S. B., Sivaram C. Dark matter, dark energy, and alternate models: A review. *Advances in Space Research*. 2017. V. 60. № 1. P. 166–186.
2. Nojiri S., Odintsov S. D., Oikonomou V. K. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. *Physics Reports*. 2017. V. 692. P. 1–104.



3. *Fernandes P. G. S. et al.* The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review. *Classical and Quantum Gravity*. 2022. V. 39. № 6. С. 063001.
4. *Nojiri S., Odintsov S. D., Sasaki M.* Gauss-Bonnet dark energy. *Physical Review D*. 2005. V. 71. № 12. P. 123509.
5. *Fomin I.* Gauss–Bonnet term corrections in scalar field cosmology. *The European Physical Journal C*. 2020. V. 80. № 12. P. 1145.
6. *Chervon, Sergei, Igor Fomin, Valerian Yurov, and Artyom Yurov.* Scalar field cosmology. V. 13. World Scientific, 2019.
7. *Salopek D.S., Bond J.R.* Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models, *Phys. Rev. D*42. 1990. P. 3936–3962. DOI:10.1103/PhysRevD.42.3936.
8. *Liddle A.R., Lyth D.H.* COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation, *Phys. Lett. B*291. 1992. P. 391–398. DOI:10.1016/0370-2693(92)91393-N, arXiv:astro-ph/9208007 [astro-ph].
9. *Aghanim N., Akrami Y., Ashdown M., Aumont J., Baccigalupi C., Ballardini M., Banday A., Barreiro R., Bartolo N., Basak S., et al.* Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*. 2020. V. 641. P. A6.
10. *Tristram M., Banday A.J., Górski K.M., Keskitalo R., Lawrence C., Andersen K.J., Barreiro R.B., Borrill J., Colombo L., Eriksen H., et al.* Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Physical Review D*. 2022. V. 105. № 8. P. 083524.
11. *Koh S., Lee B. H., Tumurtushaa G.* Reconstruction of the scalar field potential in inflationary models with a Gauss-Bonnet term. *Physical Review D*. 2017. V. 95. № 12. C. 123509.
12. *Tristram M. et al.* Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Physical Review D*. 2022. V. 105. № 8. C. 083524.

#### **Информация об авторах**

**Георг Дереникович Манучарян** – ассистент, кафедра «Физика»; инженер  
SPIN-код: 2565-2251

**Игорь Владимирович Фомин** – д.ф.-м.н., профессор, кафедра «Физика»  
SPIN-код: 4676-2672

Статья поступила в редакцию 27.05.2024  
Одобрена после рецензирования 15.07.2024  
Принята к публикации 28.08.2024

Original article

# Analytic coupled solutions of the equations of cosmological dynamics in the framework of GR and Einstein-Gauss-Bonnet gravity

G.D. Manucharyan<sup>1</sup>, I.V. Fomin<sup>2</sup><sup>1, 2</sup> Bauman Moscow State Technical University (Moscow, Russia)<sup>1</sup> Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University (Moscow, Russia)<sup>1</sup>gdmanucharyan@bmstu.ru, <sup>2</sup>fomin\_iv@bmstu.ru

## Abstract

At present there exist various modified theories of gravitation, the analytical solution of which is significantly complicated due to their nonlinear integro-differential forms. Thus there are no models allowing to extend the solutions obtained in the framework of GR to the cases of modified gravitation (in the considered case Einstein-Gauss-Bonnet gravitation) by means of the functional dependence on inflationary parameters and linear combination of the slow rolling parameters of the former.

The aim of this work is to find analytic solutions of the equations of cosmological dynamics in the framework of Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) gravity, related to the solutions of the equations of background dynamics in the framework of GR, and to determine the parameters allowing their verification.

In the framework of the present work a new form of the connection of inflationary parameters between EGB gravity and the general theory of relativity (GTR) is presented, the functional dependences of cosmological parameters of EGB gravity through the parameters of GTR are expressed, taking into account the proposed form of connection. A specific model of cosmological inflation for the case of GR is considered, it is shown that the model is not verifiable by observational constraints.

It is shown that the proposed form of coupling allows to extend the solutions of the equations of cosmological dynamics of GR to the case of Einstein-Gauss-Bonnet gravitation, which in turn makes it possible to estimate quantum corrections to GR operating only with inflationary parameters of GR.

## Keywords

General Relativity, Einstein-Gauss-Bonnet gravity, slow-roll approximation, gravitational waves

## For citation

Manucharyan G.D., Fomin I.V. Analytical coupled solutions of the equations of cosmological dynamics in the framework of GR and Einstein-Gauss-Bonnet gravitation. *Nonlinear World*. 2024. V. 22. № 3. P. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-202403-08> (In Russian)

## REFERENCES

1. Arun K., Gudennavar S. B., Sivaram C. Dark matter, dark energy, and alternate models: A review. *Advances in Space Research*. 2017. V. 60. № 1. P. 166–186.
2. Nojiri S., Odintsov S. D., Oikonomou V. K. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. *Physics Reports*. 2017. V. 692. P. 1–104.
3. Fernandes P. G. S. et al. The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review. *Classical and Quantum Gravity*. 2022. V. 39. № 6. C. 063001.
4. Nojiri S., Odintsov S. D., Sasaki M. Gauss-Bonnet dark energy. *Physical Review D*. 2005. V. 71. № 12. P. 123509.
5. Fomin I. Gauss–Bonnet term corrections in scalar field cosmology. *The European Physical Journal C*. 2020. V. 80. № 12. P. 1145.
6. Chervon, Sergei, Igor Fomin, Valerian Yurov, and Artyom Yurov. *Scalar field cosmology*. V. 13. World Scientific, 2019.
7. Salopek D.S., Bond J.R. Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models, *Phys. Rev. D* 42. 1990. P. 3936–3962. DOI:10.1103/PhysRevD.42.3936.
8. Liddle A.R., Lyth D.H. COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation, *Phys. Lett. B* 291. 1992. P. 391–398. DOI:10.1016/0370-2693(92)91393-N, arXiv:astro-ph/9208007 [astro-ph].
9. Aghanim N., Akrami Y., Ashdown M., Aumont J., Baccigalupi C., Ballardini M., Banday A., Barreiro R., Bartolo N., Basak S., et al. Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*. 2020. V. 641. P. A6.
10. Tristram M., Banday A.J., Górski K.M., Keskitalo R., Lawrence C., Andersen K.J., Barreiro R.B., Borrill J., Colombo L., Eriksen H., et al. Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Physical Review D*. 2022. V. 105. № 8. P. 083524.
11. Koh S., Lee B. H., Tumurtushaa G. Reconstruction of the scalar field potential in inflationary models with a Gauss-Bonnet term. *Physical Review D*. 2017. V. 95. № 12. C. 123509.
12. Tristram M. et al. Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data. *Physical Review D*. 2022. V. 105. № 8. C. 083524.

## Information about the authors

**Gevorg D. Manucharyan** – Assistant, Physics Department, Faculty of Fundamental Sciences

**Igor V. Fomin** – Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Physics Department, Faculty of Fundamental Sciences

The article was submitted 27.05.2024

Approved after reviewing 15.07.2024

Accepted for publication 28.08.2024