

Научная статья
УДК 621.391, 621.396.25
DOI: 10.18127/j19997493-202502-07

Определение параметров полигармонического ряда с близко разнесенными частотами

Г.О.Калыгин¹, Л.А. Калыгина²

^{1,2} ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых» (г. Владимир, Россия)
¹ gkalygin@yandex.ru, ² lkalygina60@mail.ru

Аннотация

Постановка проблемы. Моделью представления данных различных геофизических полей является описание в виде полигармонического ряда с известными частотами составляющих, в том числе с частотами солнечно-лунных гравитационных приливов. Оценка параметров таких рядов важна для изучения физических процессов в земной коре и приземных слоях атмосферы. Применение стандартных методов цифрового спектрального анализа требует использования длинных рядов, поскольку частоты составляющих ряда в общем случае не кратны между собой, разнос частот соседних составляющих имеет порядок 10^{-3} , амплитуды составляющих модулированы более низкочастотными составляющими. Актуальной является задача оценки параметров полигармонического ряда на интервале времени, соизмеримом с периодом составляющих ряда для получения зависимостей параметров ряда во времени. В работе рассматривается применение преобразования Фурье на ограниченном числе точек для оценки амплитуды и начальной фазы составляющих полигармонического ряда с близко разнесенными частотами.

Цель. Разработать методику оценки параметров полигармонического ряда с известными частотами и показать ее применение для получения временных зависимостей амплитуды и начальной фазы основных солнечно-лунных приливов в вариациях вертикальной составляющей электрического поля Земли.

Результаты. Приведены выражения для значений амплитуды и начальной фазы суммы гармонических составляющих по результатам расчета частичных сумм преобразования Фурье. Получены оценки амплитуд и начальных фаз данных наблюдений вертикальной составляющей электрического поля Земли основных солнечно-лунных приливов. Отмечено, что линейные изменения начальной фазы на соседних периодах позволяют решить задачу обнаружения данных заданной частоты. Для интервала наблюдений вертикальной составляющей электрического поля Земли 1,5 года выявлены наличие приливов S_1 , P_1 , S_2 и K_2 , амплитудная модуляция прилива K_2 частотой с периодом 1/4 года.

Практическая значимость. Разработанная методика позволяет получать параметры составляющих полигармонического ряда с известными близко расположенными частотами. Методику можно использовать для анализа данных наблюдений различных геофизических полей.

Ключевые слова

Полигармонический ряд, солнечно-лунные приливы, преобразование Фурье, амплитуда, начальная фаза

Работа выполнена в рамках государственного задания ВлГУ «Качественные свойства решений линейных и квазилинейных уравнений второго порядка эллиптического типа, моделирование микроэлектронных схем высокой размерности (FZUN-2023-0004)».

Это последний научно-исследовательский проект, организатором и научным руководителем которого был Владимир Николаевич Ланцов.

Для цитирования

Калыгин Г.О., Калыгина Л.А. Определение параметров полигармонического ряда с близко разнесенными частотами // Динамика сложных систем. 2025. Т. 19. № 2. С. 50–56. DOI: 10.18127/j19997493-202502-07

A brief version in English is given at the end of the article

Введение

Рассмотрим способы определения амплитуд A_i и начальных фаз ϕ_{0i} составляющих полигармонического ряда $s(nT)$ с близко разнесенными частотами:

$$s(nT) = \sum_{i=1}^L A_i \sin(2\pi f_i nT + \phi_{0i}). \quad (1)$$

Близко разнесенными частотами будем называть частоты f_i и f_j (ω_i и ω_j), для которых число точек на периоде определяется как $M_1 = \frac{\omega_d}{\omega_1}$, $M_1 = \frac{\omega_d}{\omega_1}$ и $|M_1 - M_2| < 1$. Примером близко разнесенных частот яв-

ляются частоты гравитационных солнечно-лунных приливов [1]. Например, частота прилива S1 f_{S1} равна $1,157407561284 \cdot 10^{-5}$ Гц, рядом расположенные приливы P1 и K1 имеют частоты $f_{P1} = 1,15423850308642 \cdot 10^{-5}$, $f_{K1} = 1,160557631172839 \cdot 10^{-5}$.

Наличие приливных составляющих в геофизических полях подтверждается исследованиями геомагнитного поля, параметров ионосферы [2], вариации атмосферного давления [2, 3], вертикальной составляющей электрического поля Земли [4, 5] и др.

Применение алгоритмов ДПФ [6] для близко разнесенных частот f_i и f_j требует анализа большого числа точек, а это тысячи и десятки тысяч периодов.

Среди методов спектрального оценивания [7, 8] следует отметить метод Прони, позволяющий оценить частоты и амплитуды гармонических составляющих на коротких интервалах данных, однако он дает точные оценки спектра только для сильно разнесенных частот [7].

Ц е л ь р а б о т ы – разработать методику оценки параметров полигармонического ряда с известными частотами и показать ее применение для получения временных зависимостей амплитуды и начальной фазы основных солнечно-лунных приливов в вариациях вертикальной составляющей электрического поля Земли.

Для анализа близко разнесенных частот в работе используется преобразование Фурье (ПФ) для дискретных сигналов [6] на ограниченном числе точек N , которое далее будем называть *частичные суммы ПФ* (ЧСПФ).

Для выделения близко расположенных частот необходимо использовать узкополосные нерекурсивные фильтры с линейной фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) [5, 6].

Частичные суммы преобразования Фурье

Понятие *спектр дискретного сигнала* $s(nT)$ относится ко всей последовательности в целом. Для его определения используется ПФ:

$$\dot{S}(\omega, \omega_0) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT) e^{-j\omega_0 nT}. \quad (2)$$

Применение ПФ в общем случае является физически не реализуемым, так как для расчетов необходимо использовать все, в том числе и будущие отсчеты сигнала. ПФ можно использовать только для частных случаев, если сигнал содержит фиксированное число ненулевых отсчетов N или периодического сигнала с периодом N . Тогда (2) имеет вид

$$\dot{S}(\omega, \omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j\omega_0 nT}. \quad (3)$$

Это выражение является ЧСПФ.

Для периодического сигнала ЧСПФ дает значение коэффициентов ДПФ на частотах $\omega = k\omega_d/N$, $k = 0, 1, \dots, (N-1)$.

Запишем выражение для гармонического сигнала с частотой ω , амплитудой A и начальной фазой φ_0

$$s(nT) = A \sin(\omega nT + \varphi_0). \quad (4)$$

Найдем ЧСПФ для числа точек $N = M$, если $M = \frac{\omega_d}{\omega}$ – целое, или для целого числа точек N и $N+1$,

для которых

$$N < M < N+1 \text{ и } M - N < 1. \quad (5)$$

Для получения значения спектра $\dot{S}(\omega, \omega_0)$ можно использовать какой-либо алгоритм аппроксимации. Также $\dot{S}(\omega, \omega_0)$ можно найти аналитически или численно. Для сигнала (4) с $A = 1$ и $\varphi_0 = 0$ выведем выражение ЧСПФ и обозначим ее $\dot{S}_{0S}(\omega, \omega_0)$. В общем случае $\omega \neq \omega_0$. Тогда

$$\dot{S}_{0S}(\omega, \omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}}{2j} e^{-j\omega_0 nT} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j(\omega-\omega_0)nT} - e^{-j(\omega+\omega_0)nT}) = \frac{1}{2j} (\dot{S}'_{0S}(\omega, \omega_0) - \dot{S}''_{0S}(\omega, \omega_0)). \quad (6)$$

Последовательности $e^{j(\omega-\omega_0)nT}$ и $e^{-j(\omega+\omega_0)nT}$ для $n = 1 \dots (N-1)$ и $\omega \neq \omega_0$, – геометрические прогрессии, поэтому

$$\dot{S}'_{0S} = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega-\omega_0)nT} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{e^{j(\omega-\omega_0)NT} - 1}{e^{j(\omega-\omega_0)T} - 1}, \quad (7)$$

$$\dot{S}''_{0S}(\omega, \omega_0) = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega+\omega_0)nT} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{e^{-j(\omega+\omega_0)NT} - 1}{e^{-j(\omega+\omega_0)T} - 1}, \quad (8)$$

где $\dot{S}'_{0S}(\omega, \omega_0)$ и $\dot{S}''_{0S}(\omega, \omega_0)$ – комплексные константы.

Для $\omega = \omega_0$ выражение (6) имеет вид

$$\dot{S}_{0S}(\omega, \omega_0) = \frac{1}{2j} \left(\sum_{n=0}^{N-1} 1 - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\omega_0 nT} \right) = \frac{1}{2j} \left(N - \frac{e^{-j2\omega_0 NT} - 1}{e^{-j2\omega_0 T} - 1} \right). \quad (9)$$

Если частота ω_0 кратна частоте дискретизации $N = M$ – целое число и $\omega_0 NT = 2\pi$, то выражения (6) и (9) можно записать как

$$\dot{S}_{0S}(\omega, \omega_0) = \frac{1}{2j} \left(\frac{e^{j\omega NT} - 1}{e^{j2\omega T} - 1} - \frac{e^{-j\omega NT} - 1}{e^{-j2\omega T} - 1} \right), \quad (10)$$

$$\dot{S}_{0S}(\omega_0, \omega_0) = \frac{1}{2j} N = \frac{N}{2} e^{-j\pi/2}. \quad (11)$$

Если начальная фаза $A \neq 1$ и $\phi_0 \neq 0$, то (4) можно представить в виде

$$s(nT) = A \sin(\omega nT) \cos \phi_0 + A \cos(\omega nT) \sin \phi_0 = A_c \sin(\omega nT) + A_s \cos(\omega nT), \quad (12)$$

где $A_c = A \cos \phi_0$; $A_s = A \sin \phi_0$;

$$A_c^2 + A_s^2 = A^2; \quad \phi_0 = \arctg(A_s / A_c). \quad (13)$$

Приведем ЧСПФ для (12):

$$\dot{S}(\omega, \omega_0) = A_c \dot{S}_{0S}(\omega, \omega_0) + A_s \dot{S}_{0C}(\omega, \omega_0). \quad (14)$$

Здесь $\dot{S}_{0S}(\omega, \omega_0)$ рассчитывается по формулам (6)–(8) или (9)–(11).

В общем случае $\dot{S}_{0C}(\omega, \omega_0)$ определяется по формуле

$$\dot{S}_{0C}(\omega, \omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{j\omega nT} + e^{-j\omega nT}}{2} e^{-j\omega_0 nT} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j(\omega-\omega_0)nT} + e^{-j(\omega+\omega_0)nT}) = \frac{1}{2} (\dot{S}'_{0S}(\omega, \omega_0) + \dot{S}''_{0S}(\omega, \omega_0)). \quad (15)$$

Подстановка выражений (9) и (14) в (13) дает ЧСПФ для сигнала (4).

Расчет ЧСПФ суммы гармонических дискретных сигналов

Рассмотрим случай, когда $s(nT)$ – сумма двух гармонических сигналов с неизвестными амплитудами и начальными фазами:

$$s(nT) = s_1(nT) + s_2(nT), \quad (16)$$

$$s_1(nT) = A_1 \sin(\omega_1 nT + \phi_{01}), \quad (17)$$

$$s_2(nT) = A_2 \sin(\omega_2 nT + \phi_{02}). \quad (18)$$

Найдем значения ЧСПФ для (17) и (18) для комбинаций частот ω_1 и ω_2 по выражению (14):

$$\dot{S}_{ij} = \dot{S}(\omega_i, \omega_j) = A_{ci} \dot{S}_{0S}(\omega_i, \omega_j) + A_{si} \dot{S}_{0C}(\omega_i, \omega_j), \quad (19)$$

где $i, j = 1$ или $i, j = 2$; i – номер частоты сигнала (17) или (18); j – номер частоты, для которой рассчитывается ЧСПФ; $A_{ci} = A_i \cos \phi_{0i}$, $A_{si} = A_i \sin \phi_{0i}$.

Составим систему уравнений четырех неизвестных A_{c1} , A_{s1} , A_{c2} и A_{s2} с комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} A_{c1} \dot{S}_{0S}(\omega_1, \omega_1) + A_{s1} \dot{S}_{0C}(\omega_1, \omega_1) + A_{c2} \dot{S}_{0S}(\omega_2, \omega_1) + A_{s2} \dot{S}_{0C}(\omega_2, \omega_1) = \dot{S}_1, \\ A_{c1} \dot{S}_{0S}(\omega_1, \omega_2) + A_{s1} \dot{S}_{0C}(\omega_1, \omega_2) + A_{c2} \dot{S}_{0S}(\omega_2, \omega_2) + A_{s2} \dot{S}_{0C}(\omega_2, \omega_2) = \dot{S}_2. \end{cases} \quad (20)$$

Правые части уравнений находятся по формуле (3): $\dot{S}_1$ – для частоты ω_1 , $\dot{S}_2$ – для частоты ω_2 . Приравняв действительные и мнимые части (20), получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с четырьмя неизвестными.

Решением СЛАУ будут значения A_{c1} , A_{s1} , A_{c2} и A_{s2} . Используя соотношения (13), находим искомые параметры (17) и (18) – A_1 , ϕ_{01} , A_2 и ϕ_{02} .

Рассмотренный алгоритм можно обобщить на случай L близко разнесенных частот ряда (1): формируются тестовые сигналы $\sin \omega_j nT$ и $\cos \omega_j nT$, $j = 1 \dots L$, $n = 0, \dots, (N-1)$;

рассчитываются $\dot{S}_{0S}(\omega_i, \omega_j)$ и $\dot{S}_{0C}(\omega_i, \omega_j)$, $i, j = 1 \dots L$;

для каждой частоты f_i находятся ЧСПФ ряда (18) – значения $\dot{S}_i$, $i = 1 \dots L$;

составляется система L уравнений с комплексными переменными:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^L A_{cj} \dot{S}_{0S}(\omega_j, \omega_1) + A_{sj} \dot{S}_{0C}(\omega_j, \omega_1) = \dot{S}_1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^L A_{cj} \dot{S}_{0S}(\omega_j, \omega_L) + A_{sj} \dot{S}_{0C}(\omega_j, \omega_L) = \dot{S}_L, \end{cases} \quad (21)$$

система (21) преобразуется в СЛАУ для $2P$ переменных, находятся A_{cj} и A_{sj} , $j = 1 \dots P$; производится расчет амплитуд и начальных фаз по (13).

Анализ данных наблюдений электрического поля Земли

Алгоритм расчета амплитуд и начальных фаз был протестирован на тестовых примерах с частотами, соответствующими частотам приливов S1 и P1, S2 и K2 при изменении соотношений амплитуд, составляющих от 1:1 до 1:0,1 для разных значений начальных фаз. Моделирование показало адекватность предложенного подхода.

Для исследований были использованы данные наблюдений электрического поля Земли, полученные на полигоне ВлГУ с 7.06.2008 г. по 27.09.20010 г. В ходе эксперимента изменялась ширина полосы фильтра (порядок фильтра-NF), фильтр Ф1 144000 порядка и Ф2 108000 порядка.

На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования для приливов S2 и K2. По оси абсцисс указан номер периода частоты S2, для которого выполнялся анализ (частота S2 кратна частоте дискретизации). Постоянство начальной фазы, вычисленное для различных периодов, свидетельствует о выделении детерминированного сигнала с частотой прилива S2. Фаза прилива с частотой, не кратной частоте дискретизации, должна изменяться линейно, что и получено при использовании фильтра Ф1 (рис. 1). По-

этому результаты, представленные на рис.1, следует рассматривать как оценки амплитуды и начальной фазы приливов S2 и K2. На рис. 1 выделяется период амплитудной модуляции прилива K2, равный 1/4 года.

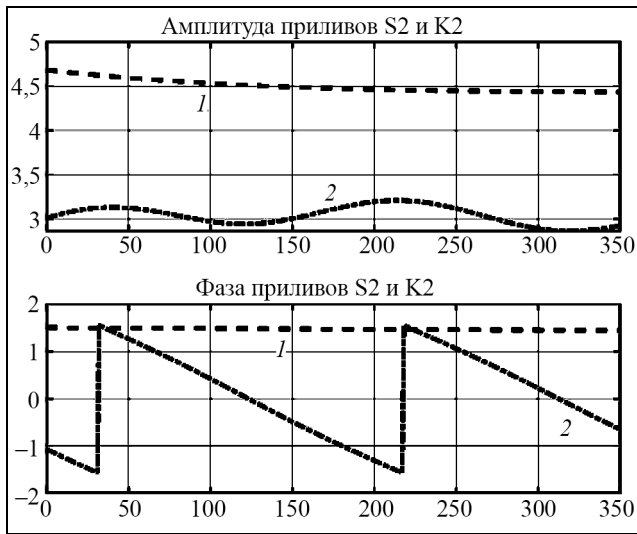


Рис. 1. Графическое представление результатов моделирования для приливов S2(1) и K2(2) с использованием фильтра Ф1
Fig. 1. Amplitude and phase of tides S2(1) и K2(2), filter 1

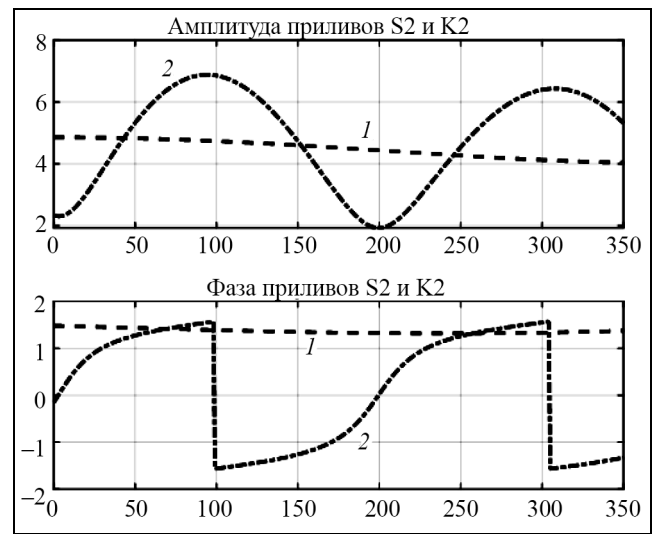


Рис. 2. Графическое представление результатов моделирования для приливов S2(1) и K2(2) с использованием фильтра Ф2
Fig. 2. Amplitude and phase of tides S2(1) и K2(2), filter 2

Прилив S2 также имеет амплитудную модуляцию, период которой может быть определен при использовании более длинного набора данных. Результаты, представленные на рис. 2, соответствуют анализу данных на выходе фильтра Ф2 с более широкой полосой пропускания. Начальная фаза S2 – линейная, значение такое же, как для Ф1. Прилив K2 промодулирован по амплитуде, параметры модуляции отличаются от данных выхода Ф1, фаза сильно нелинейная, что свидетельствует о наличии паразитной фазовой модуляции, вызванной, с большой долей вероятности, наличием шумов в полосе Ф2. Результаты моделирования (рис. 2), полученные для Ф2, нельзя использовать для оценки параметров приливов S2 и K2.

На рис. 3 и 4 представлены аналогичные результаты моделирования для приливов S1 и P1.

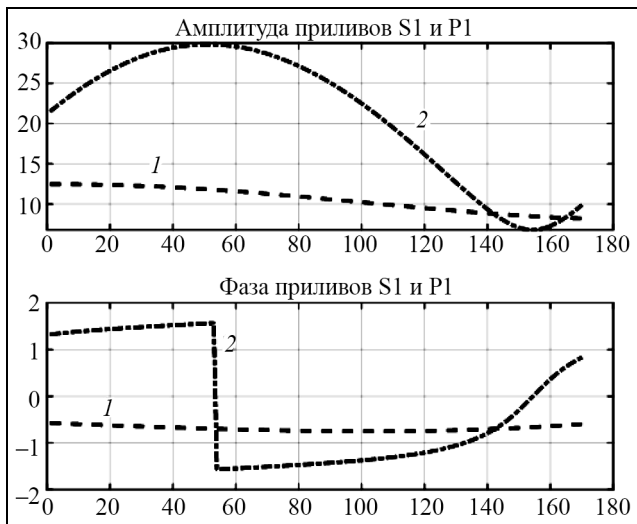


Рис. 3. Графическое представление результатов моделирования для приливов S1(1) и P1(2) с использованием фильтра Ф1
Fig. 3. Amplitude and phase of tides S1(1) и P1 (2), filter 1

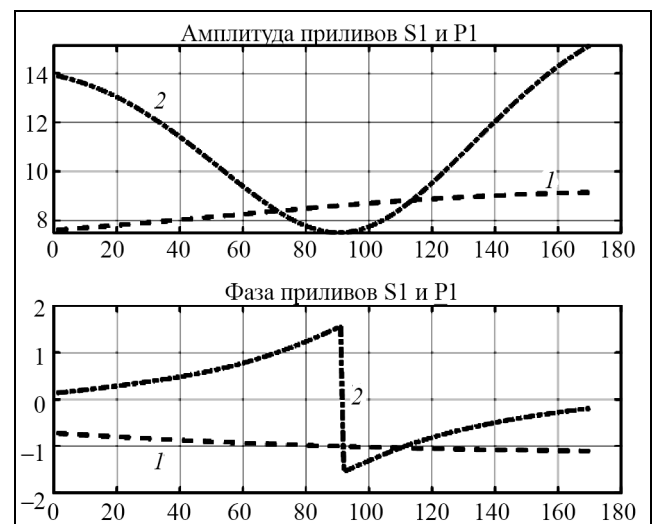


Рис. 4. Графическое представление результатов моделирования для приливов S1(1) и P1(2) с использованием фильтра Ф2
Fig. 4. Amplitude and phase of tides S1(1) и P1 (2), filter 2

На рис. 3 выделяем область постоянства начальной фазы $S1$ и линейности фазы $P1$ от 1 до 100 периода $S1$. Этот интервал можно использовать для оценки амплитуд этих приливов. Увеличение полосы фильтра (рис. 4) приводит к линейному изменению фазы $S1$ и нелинейности фазы $P1$. Это связано с наличием большого числа приливов около прилива $S1$ – приливы π_1 , $K1$, ψ_1 , ϕ_1 и др. Анализ параметров этих приливов необходимо выполнять для большего числа близко разнесенных частот, добиваясь постоянства фазы $S1$ и линейности фазы остальных приливов.

Заключение

В работе изложена методика анализа параметров полигармонического ряда с известными близко разнесенными частотами на числе точек, соответствующих одному периоду. Для анализа необходимо выделить группу близко разнесенных составляющих. Оценка параметров можно выполнять при условии линейности изменения начальной фазы (или постоянства фазы, если частота кратна частоте дискретизации), это достигается уменьшением полосы пропускания фильтра или учетом большего числа частот.

Предложенная методика позволяет проводить оценку параметров ряда во времени, в отличие от стандартных методов, усредняющих значения параметров на всем интервале анализа.

Результаты исследований могут быть использованы при анализе данных наблюдений с близко разнесенными частотами.

Список источников

1. Мельхиор П. Земные приливы. М.: Мир. 1968. 482 с.
2. Хабитуев Д.С., Шпынев Б.Г., Татарников А.В., Щеглова Е.С. Влияние гравитационного прилива Солнца и Луны на динамику параметров атмосферы, ионосферы и океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2017. Т. 14. № 5. С. 321–339.
3. Адушкин В.В., Спивак А.А., Рыбнов Ю.С., Харламов В.А. Приливные волны и вариации давления в атмосфере земли // Геофизические исследования. 2017. Т. 18. № 3. С. 67–80.
4. Грунская Л.В. Оценка параметров электрического поля приземного слоя атмосферы на основе корреляционного приема: Дис. ... докт. техн. наук. Владимир. 2006. 256 с.
5. Ефимов В.А., Ефимов В.А., Калыгина Л.А. Структура вариаций электрического поля Земли в диапазоне частот $1 \cdot 10^{-5} \div 2,5 \cdot 10^{-5}$ Гц // Динамика сложных систем. 2015. № 2. С. 39–45.
6. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для институтов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь. 1990. 256 с.
7. Оппенгейм А., Шаффер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера. 2012. 1048 с.
8. Марпл С.Л.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. О.И. Хабарова, Г.А. Сидоровой; под ред. И.С. Рыжака. М.: Мир. 1990. 584 с.

Информация об авторах

Георгий Отарович Калыгин – аспирант

SPIN-код: 2706-7596

Любовь Александровна Калыгина – к.т.н., доцент

SPIN-код: 8924-17831

Статья поступила в редакцию 29.04.2025

Одобрена после рецензирования 14.05.2025

Принята к публикации 26.05.2025

Original article

Determination of the parameters of a polyharmonic series with closely spaced frequencies

G.O. Kalygin¹, L.A. Kalygina²^{1,2} Vladimir State University n.a. A.G. and N.G. Stoletovs (Vladimir, Russia)¹ gkalygin@yandex.ru, ² lkalygina60@mail.ru

Abstract

A model for representing data from various geophysical fields is a description in the form of a polyharmonic series with known component frequencies, including the frequencies of solar-lunar gravitational tides. Estimating the parameters of such series is important for studying physical processes in the Earth's crust and near-surface layers of the atmosphere. The use of standard digital spectral analysis methods requires the use of long series, because the frequencies of the components of the series are generally not multiples of each other, the frequency spacing of the neighboring components is of the order of 10^{-3} , the amplitudes of the components are modulated by lower frequency components. An urgent task is to estimate the parameters of a polyharmonic series over a time interval commensurate with the period of the components of the series in order to obtain the dependencies of the series parameters over time. The paper considers the application of the Fourier transform on a limited number of points to estimate the amplitude and initial phase of the components of a polyharmonic series with closely spaced frequencies.

Development of a methodology for estimating the parameters of a polyharmonic series with known frequencies and its application to obtain time dependences of the amplitude and initial phase of the main solar-lunar tides in variations of the vertical component of the Earth's electric field.

Expressions for the values of the amplitude and the initial phase of the sum of the harmonic components are obtained based on the results of calculating the partial sums of the Fourier transform. Estimates of the amplitudes and initial phases of the observational data of the vertical component of the Earth's electric field of the main solar-lunar tides are obtained. Linear changes in the initial phase in neighboring periods make it possible to solve the problem of detecting data of a given frequency. For the observation interval of the vertical component of the Earth's electric field of 1.5 years, the presence of tides S1, P1, S2 and K2, the amplitude modulation of the tide K2 frequency with a period of 1/4 year, was revealed.

The developed technique makes it possible to obtain the parameters of the components of a polyharmonic series with known closely spaced frequencies, and can be used to analyze observational data from various geophysical fields.

Keywords

Polyharmonic series, solar-lunar tides, Fourier transform, amplitude, initial phase

For citation

Kalygin G.O., Kalygina L.A. Determination of the parameters of a polyharmonic series with closely spaced frequencies. Dynamics of complex systems. 2025. V. 19. № 2. P. 50–56. DOI: 10.18127/j19997493-202502-07 (in Russian).

References

- Mel'hior P. Zemnye prilivy. M.: Mir. 1968. 482 s. (in Russian).
 Habituev D.S., Shpynev B.G., Tatarnikov A.V., Shcheglova E.S. Vliyanie gravitacionnogo priliva Solnca i Luny na dinamiku parametrov atmosfery, ionosfery i okeana. Sovremennyye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa. 2017. T. 14. № 5. S. 321–339 (in Russian).
 Adushkin V.V., Spivak A.A., Rybnov Yu.S., Harlamov V.A. Prilivnye volny i variacii davleniya v atmosfere zemli. Geofizicheskie issledovaniya. 2017. T. 18. № 3. S. 67–80 (in Russian).
 Grunskaya L.V. Ocenka parametrov elektricheskogo polya prizemnogo sloya atmosfery na osnove korrelyacionnogo priema: Dis. ... dokt. tekhn. nauk. Vladimir. 2006. 256 s. (in Russian).
 Efimov V.A., Efimov V.A., Kalygina L.A. Struktura variacij elektricheskogo polya Zemli v diapazone chastot $1 \cdot 10^{-5}$ ÷ $2,5 \cdot 10^{-5}$ Gc. Dinamika slozhnykh sistem. 2015. № 2. S. 39–45 (in Russian).
 Gol'denberg L.M., Matyushkin B.D., Polyak M.N. Cifrovaya obrabotka signalov: Ucheb. posobie dlya institutov. Izd. 2-e, pererab. i dop. M.: Radio i svyaz'. 1990. 256 s. (in Russian).
 Oppengejm A., Shaffer R. Cifrovaya obrabotka signalov. M.: Tekhnosfera. 2012. 1048 s. (in Russian).
 Marpl S.L.-ml. Cifrovoj spektral'nyy analiz i ego prilozheniya: Per. s angl. O.I. Habarova, G.A. Sidorovoj; pod red. I.S. Ryzhaka. M.: Mir. 1990. 584 s. (in Russian).

Information about the authors

Georgiy O. Kalygin – Post-graduate Student

Lubov A. Kalygina – Ph. D. (Eng.), Associate Professor

The article was submitted 29.05.2025

Approved after reviewing 14.05.2025

Accepted for publication 26.05.2025